17/5/2016

Απόσταση σε επιφάνειες

Έστω S (συνεκτική) κανονική επιφάνεια $p, q \in S$

Καλούμε απόσταση των p, q στην S τον

αριθμό: $\inf\{L(c) /$ (κατά τμήματα κανονική

καμπύλη με άκρα $p, q\}$. Συμβολίζεται με $d_S(p,q)$

Έστω φ ισομετρία $\varphi: S \to \tilde{S}$ ισομετρία τότε

ισχύει: $d_S(p,q) = d_{\tilde{S}}(\varphi(p), \varphi(q))$

Ορισμός: Μια κανονική επιφάνεια S καλείται

πλήρης αν-ν ο μετρικός χώρος (S, d)

είναι πλήρης, δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy

συγκλίνει στην S

Πρόταση: Μια κανονική επιφάνεια είναι πλήρης

αν-ν είναι γεωδαισιακά πλήρης δηλαδή

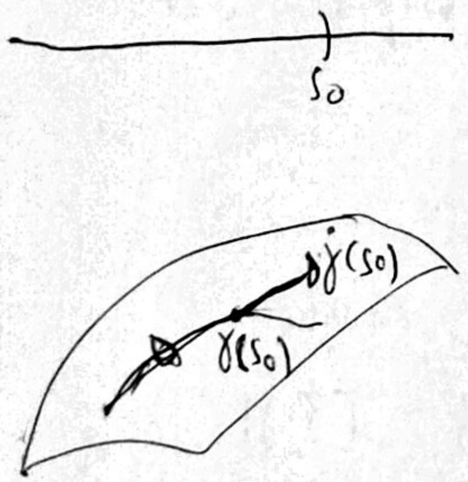
κάθε γεωδαισιακή ορίζεται σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$

(ή ισοδύναμα η $\exp_p$ ορίζεται σ' ολόκληρο

το επίπεδο T_pS $\forall p \in S$)

Πρόταση: Κάθε κανονική επιφάνεια η οποία ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ είναι κλειστό είναι πλήρης επιφάνεια.

Απόδειξη: Έστω $\gamma(s)$ γεωδαισιακή της επιφάνειας με παράμετρο το μήκος τόξου

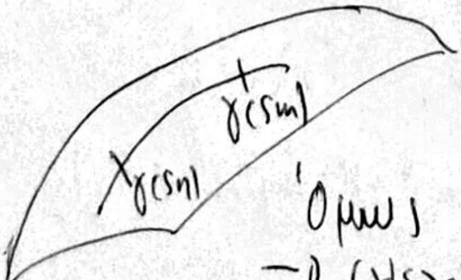


Το σύνολο $S \in \mathbb{R}$ για το οποίο ορίζεται η γεωδαισιακή είναι ανοικτό

Έστω $\gamma(s)$ γεωδαισιακή η οποία ορίζεται στο $(-\infty, s_0)$

Θεωρώ ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $s_n \in (-\infty, s_0)\ \forall n\in\mathbb{N}$

και $\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} s_n = s_0$



$$d_S(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \leq L\left(\gamma\Big|_{s_n}^{s_m}\right) = |s_n - s_m| < \varepsilon$$

Όμως s_n Cauchy

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ \forall n, m \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0,\ m \geq n_0$

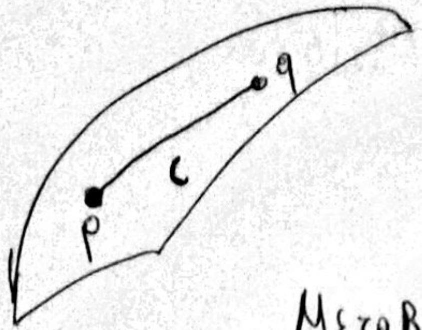
$\Rightarrow |s_n - s_m| < \varepsilon$

Όμως $d_E(\gamma(s_n),\gamma(s_m)) \leq d_S(\gamma(s_n),\gamma(s_m)) < \varepsilon$
$\Rightarrow$ Η ακολουθία $(\gamma(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ $(\gamma(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $\mathbb{R}^3$ δηλαδή $\lim \gamma(s_n) = q \in \mathbb{R}^3$. Επειδή S κλειστό $\Rightarrow q \in S$

<u>Πόρισμα</u>: Κάθε συμπαγής κανονική επιφάνεια είναι πλήρης.

Θεώρημα (Hopf - Rinow). Έστω S πλήρης κανονική επιφάνεια. Για τυχόντα σημεία $p,q \in S$ υπάρχει ελάχιστη γεωδαισιακή που τα ενώνει. Δηλαδή γεωδαισιακή της οποίας το μήκος από το p μέχρι το q είναι $d_S(p,q)$.

Πρόβλημα: Δίνονται σημεία $p,q \in S$. Να βρεθεί καμπύλη c με άκρα p,q: $L(c)=d_S(p,q)$

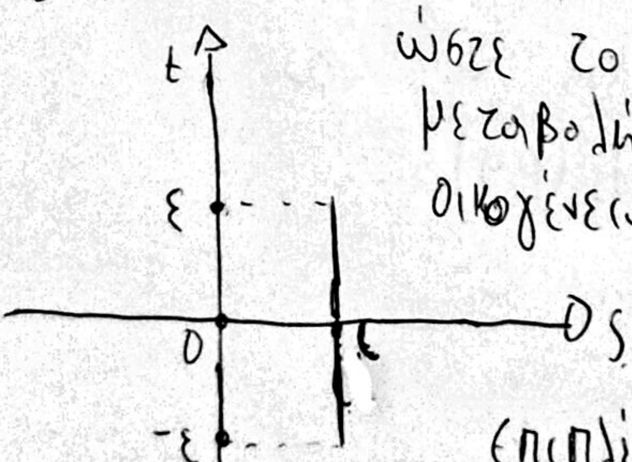


Μεταβολές καμπυλών:

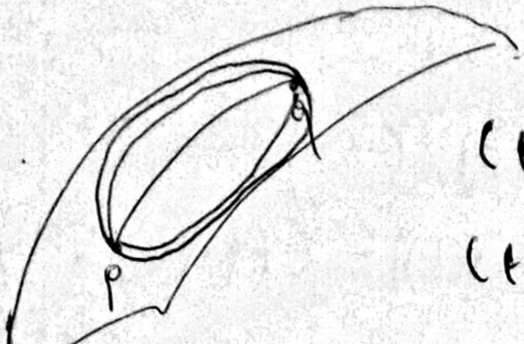
Θέλουμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών c_t, $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$: $c_0=c$

$$c_t(s)=h(t,s)$$

Ορισμός: Έστω c καμπύλη ορισμένη στο $[0,l]$, $c:[0,l]\to S$. Καλούμε μεταβολή της c κάθε λεία απεικόνιση $h:[0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$, $(s,t)\to h(s,t)$ ώστε το $h(s,0)=c(s)$. Δηλαδή κάθε μεταβολή ορίζει μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών (c_t) με $c_t(s)=h(t,s)$ και $c_0=c$



Επιπλέον, η μεταβολή h διατηρεί τα $p,q \Longleftrightarrow c_t(0)=p$, $c_t(l)=q$

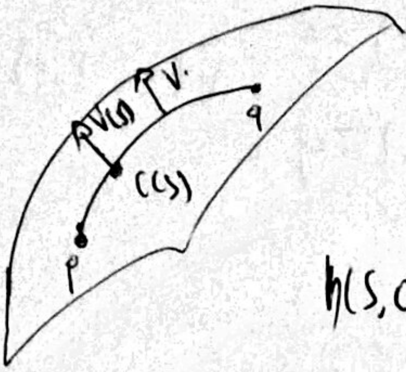


$c_t(0) = p \Leftrightarrow h(0,t) = p$
$\quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$
$c_t(l) = q \Leftrightarrow h(l,t) = q$

<u>Ορισμός</u>: Καλούμε πεδίο μεταβολής της h το διανυσματικό πεδίο V κατα μήκος της c που ορίζεται ως $V(s) = \frac{\partial h}{\partial t}(s,0) \in T_{c(s)}S$

Παρατήρηση: Αν η μεταβολή h διατηρεί τα άκρα τότε στα άκρα της $V(0) = V(l) = 0$

Πρόταση: Έστω $V(s)$ διανυσματικό πεδίο κατα μήκος $c : [0,l] \to S$ με $c(0) = p$, $c(l) = q$. Τότε υπάρχει μεταβολή της $h : [0,l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ της c της οποίας το πεδίο μεταβολής είναι το δοθεν $V(s)$.
Αν επιπλέον $V(0) = 0 = V(l)$ τότε η μεταβολή διατηρεί τα άκρα p, q



Ορίζω $h:[0,c]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$

$$h(s,t)=\exp_{c(s)}(t\cdot V(s))=\gamma(t,c(s),V(s))$$

$$h(s,0)=\exp_{c(s)}(0)=c(s)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(s,0)=\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\gamma(t,c(s),V(s))=V(s)$$

$$\left(\begin{array}{l}\gamma(t)=\gamma(t,p,v)\\ \cdot\ \gamma(0)=p\\ \quad\frac{\partial\gamma}{\partial t}\Big|_0=v\end{array}\right)$$

Έστω $V(0)=0=V(c)$

$$h(0,t)=\exp_{c(0)}(tV(0))=\exp_p(0)=p$$

Ορισμός: Έστω $c:[0,c]\to S$ καμπύλη με $c(0)=p$ και $c(c)=q$ και $h:[0,c]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ μεταβολή αυτής. Καλούμε συνάρτηση μήκους τη μεταβολή της $L:(-\varepsilon,\varepsilon)\to[0,+\infty)$ με $L(t)=L(c_t)=\int_0^c\left\|\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right\|ds$

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s,0)=\dot c(s)\Rightarrow\left\|\frac{\partial h}{\partial s}(s,0)\right\|=\|\dot c(s)\|=1\neq0$$

Λήμμα: Για ε αρκούντως μικρό η συνάρτηση μήκος $L(t)$ είναι λεία

$$L'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l \left\| \frac{\partial h}{\partial t}(s,t) \right\| ds = \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial h}{\partial t}(s,t) \right\| ds$$

$$= \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\left\langle \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle}\, ds = \int_0^l \frac{\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle}{2\sqrt{\left\langle \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle}}\, ds$$

$$= \int_0^l \frac{\cancel{2}\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle}{\cancel{2}\left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\|}\, ds = \int_0^l \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\|}\, ds$$

Άρα $$L'(t) = \int_0^l \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \underset{\overset{\|}{\dot{c}(s)}}{\frac{\partial h}{\partial s}} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\|}\, ds$$

Τότε $$L'(0) = \int_0^l \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}(s,0), \frac{\partial h}{\partial t}(s,0) \right\rangle}{\underbrace{\left\| \frac{\partial h}{\partial t}(s,0) \right\|}_{=1}}\, ds \qquad V(s) = \frac{\partial h}{\partial t}(s,0)$$

$$= \int_0^l \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}(s,0), \dot{c}(s) \right\rangle}{1}\, ds = \int_0^l \left\langle \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}(s,0), \dot{c}(s) \right\rangle ds$$

$$= \int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial h}{\partial t}(s,0), \dot{c}(s) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial h}{\partial t}(s,0), \ddot{c}(s) \right\rangle \right) ds$$

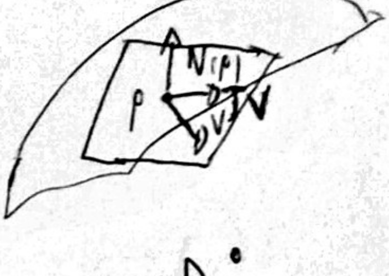
$$= \left[\langle \frac{\partial h}{\partial t}(s,0), \dot{c}(s) \right]_0^{l} - \int_0^{l} \langle \ddot{c}(s), \frac{\partial h}{\partial t}(s,0) \rangle$$

Λήμμα: $L'(0) = \left[\langle V(s), \dot{c}(s) \rangle \right]_0^{L} - \int_0^{l} \langle \ddot{c}(s), V(s) \rangle \, ds$

Ειδικά αν $V(0) = V(L) = 0$ (διατηρεί τα άκρα p, q)

Τότε $L'(0) = -\int_0^{L} \langle \ddot{c}(s), V(s) \rangle \, ds$

$$\frac{Dw}{dt} = \left(\frac{dw}{dt} \right)^{T = \text{εφαπτομενική συνιστώσα}} = \frac{dw}{dt} - \langle \frac{dw}{dt}, N \rangle N$$



$$L'(0) = -\int_0^{L} \langle \frac{D\dot{c}(s)}{ds}, V(s) \rangle \, ds$$

$$k_g = \left[\frac{D\dot{c}}{dt} \right] = \langle \ddot{c}, N \times \dot{c} \rangle = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle = \langle \frac{D\dot{c}}{ds}, J\dot{c} \rangle$$

$\{ \dot{c}(s), J\dot{c}(s) \}$ ορθομοναδιαία βάση του T_pS

Αρα $V = a\dot{c} + bJ\dot{c}$

$$\left\langle \frac{D\dot{c}}{ds}, V \right\rangle = \left\langle \frac{D\dot{c}}{ds}, a\dot{c} + bJ\dot{c} \right\rangle$$

$$= a\underbrace{\left\langle \frac{D\dot{c}}{ds}, \dot{c} \right\rangle}_{0} + b\underbrace{\left\langle \frac{D\dot{c}}{ds}, J\dot{c} \right\rangle}_{k_g}$$

Γενικά $\frac{d}{dt}\langle w_1, w_2 \rangle = \left\langle \frac{Dw_1}{dt}, w_2 \right\rangle + \left\langle w_1, \frac{Dw_2}{dt} \right\rangle$

$$0 = \frac{d}{dt}\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 2\left\langle \frac{D\dot{c}}{ds}, \dot{c} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \frac{D\dot{c}}{ds}, \dot{c} \right\rangle = 0$$

Αρα, $\left\langle \frac{D\dot{c}}{ds}, V \right\rangle = b k_g$

Τότε $L'(0) = -\int_0^L k_g \langle V, J\dot{c} \rangle ds$

<u>Πρόβλημα</u>: Δίνονται $p, q \in S$. Να βρεθεί καμπύλη $c: [0, L] \to S$ με παράμετρο το μήκος τόξου $c(0) = p$, $c(l) = q$ και $d_S(p, q) = L(c) = l - 0 = l$

Έστω c μια τέτοια καμπύλη $\Longrightarrow$ για οποιαδήποτε μεταβολή έχω $L'(0)=0$

Θεωρώ διανυσματικό πεδίο V τέτοιο ώστε

$$V(s) = k_g f(s) \cdot J\dot{c}(s), \quad f(0)=0=f(l)$$

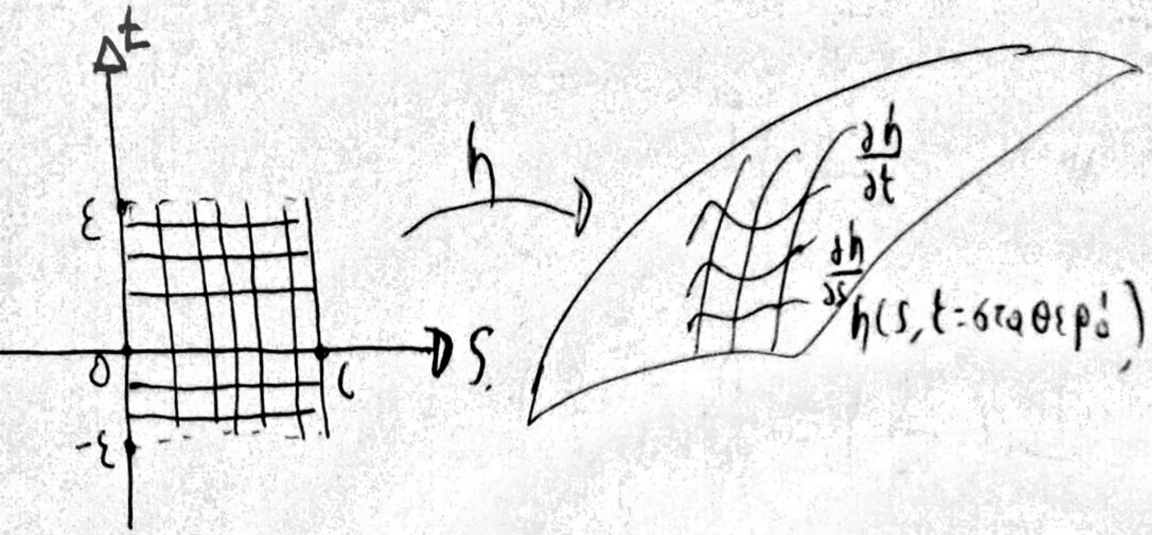
$$L'(0) = -\int_0^L k_g^2(s) \cdot f(s)\, ds = 0$$

$\xRightarrow{f>0 \text{ στο } (0,l)}$ $k_g^2(s) f(s) = 0$ παντού

$\Longrightarrow k_g(s)=0 \quad \forall s \in (0,l) \xRightarrow{\text{συνέχεια}} k_g(s)=0 \quad \forall s \in [0,L]$

Θεώρημα: Έστω p,q σημεία μιας κανονικής επιφάνειας και c μια καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου και άκρα p,q και $c(0)=p$, $c(l)=q$

Αν $d_S(p,q) = L(c) = l$ τότε η c είναι γεωδαισιακή



Είναι $h:[0,c]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ λεία

Ορισμός: Διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της h είναι κάθε λεία απεικόνιση $V:[0,c]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^3$ ώστε $V(s,t)\in T_{h(s,t)}S \quad \forall (s,t)\in[0,c]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$

Καλούμε συναλλοίωτη παράγωγο του V ως προς s το διανυσματικό πεδίο της h

$$\frac{DV}{ds}=\left(\frac{dV}{ds}\right)^{\text{εφαπτομενική συνιστώσα}}$$

$$\frac{DV}{dt}=\left(\frac{dV}{dt}\right)^{\text{εφαπτομενική συνιστώσα}}$$

$$\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}=\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}\right)^T=\left(\frac{\partial^2 h}{\partial s\,\partial t}\right)^T$$

$$\frac{D}{\partial t}\cdot\frac{\partial h}{\partial s}=\left(\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial h}{\partial s}\right)=\left(\frac{\partial^2 h}{\partial t\cdot\partial s}\right)^T$$

Λήμμα: Ισχύει $\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)=\frac{D}{\partial t}\cdot\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)$

Παρατήρηση: Γενικά $\frac{D}{\partial s}\left(\frac{DV}{\partial t}\right)\neq\frac{D}{\partial t}\left(\frac{DV}{Ds}\right)$

Την Τρίτη 31/5/2016 θα γίνει απαλλακτική πρόοδος την ώρα του μαθήματος 6-9